2. Técnicas de Resolução em Optimização Combinatória

2ª Aula

2.1. Optimização Combinatória - Introdução

2.2. Relaxações

Relaxação

Relaxação Linear

Relaxação Lagrangeana – Método de Subragiente

2.3. Resolução exacta de problemas

Branch and Bound

Planos de Corte

2.4. Software

OPTIMIZAÇÃO INTEIRA

2ª Aula

PLI $z = Min\left\{\mathbf{cx} : \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}\, ,\, \mathbf{x} \in X \subseteq \mathbf{Z}^n\right\}$

PLI (u) $z(u) = Min\left\{\mathbf{cx} + \mathbf{u}(\mathbf{b} - \mathbf{Ax}) : \mathbf{x} \in X\right\}$

DL $w_{DL} = \max_{\mathbf{u} \geq \mathbf{0}}\{z(\mathbf{u})\}$

$z(u) \leq z$

$w_{DL} \leq z$

PLI $z = Min\left\{\mathbf{cx} : \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}\, ,\, \mathbf{Dx} \leq \mathbf{d}\, ,\, \mathbf{Tx} = \mathbf{t}, \mathbf{x} \in X \subseteq \mathbf{Z}^n\right\}$

PLI (u) $z(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{y}) = Min\left\{\mathbf{cx} + \mathbf{u}(\mathbf{b} - \mathbf{Ax}) + \mathbf{v}(\mathbf{d} - \mathbf{Dx}) + \mathbf{y}(\mathbf{t} - \mathbf{Tx}) : \mathbf{x} \in X\right\}$

DL $w_{DL} = max\{z(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{y}) : \mathbf{u} \geq \mathbf{0}\, ;\, \mathbf{v} \leq \mathbf{0}\, ;\, \mathbf{y}\ \ livre\}$

OPTIMIZAÇÃO INTEIRA

- Prova-se que o valor **óptimo** do Dual Lagrangeano nunca é pior que o da relaxação linear:

$$z_{RL} \le w_{DL} \le z^*$$

- Quando um problema goza da propriedade de integralidade o valor óptimo do Dual Lagrangeano coincide com o da sua relaxação Linear:

$$z_{RL} = w_{DL} \le z^*$$

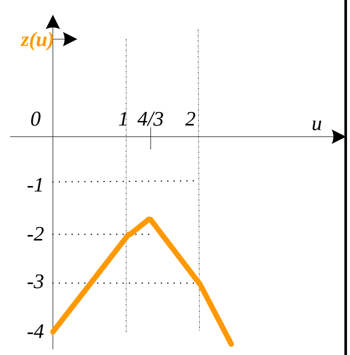
- Como obter "bons" multiplicadores de Lagrange?

$$\mathbf{u} = ?$$

OPTIMIZAÇÃO INTEIRA

- Resolver o Dual Lagrangeano de um PLI – Problema Não Linear!
- A Função Dual, $z(\mathbf{u})$, é:
  - linear por troços e côncava
- Se, ao fixar $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}}$
  - $z(\tilde{\mathbf{u}})$ tiver SO única, $\tilde{\mathbf{x}}$

  $\Rightarrow$ $z(\tilde{\mathbf{u}})$ é diferenciável com gradiente $\mathbf{b} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}$



Ex.: $z(\tilde{u}) = \underset{\mathbf{x} \in X}{Min} \{ x_1 \underset{\oplus}{(1 - \tilde{u})} + x_2 \underset{\ominus}{(\tilde{u} - 2)} \}$

$$\tilde{u} < 1 \quad \Rightarrow \quad \tilde{\mathbf{x}} = (0,2)$$

gradiente:

OPTIMIZAÇÃO INTEIRA

- Se ao fixar $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}}$
  - $z(\tilde{\mathbf{u}})$ tiver SO alternativas
  - $\Rightarrow$ $z(\tilde{\mathbf{u}})$ **não** é diferenciável!
- Subgradiente de uma função côncava em $\tilde{\mathbf{x}}$

$$z(\tilde{\mathbf{u}}) + \gamma(\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{u}}) \geq z(\tilde{\mathbf{u}})$$

- Colecção de Subgradientes em $\tilde{\mathbf{x}}$

$$Sub = \left\{ \sum_{\tilde{\mathbf{x}} \in S(\tilde{\mathbf{u}})} \lambda_{\tilde{\mathbf{x}}} (\mathbf{b} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}) : \sum_{\tilde{\mathbf{x}} \in S(\tilde{\mathbf{u}})} \lambda_{\tilde{\mathbf{x}}} = 1 , \lambda_{\tilde{\mathbf{x}}} \geq \mathbf{0} , \forall \tilde{\mathbf{x}} \in S(\tilde{\mathbf{u}}) \right\}$$

onde: $S(\tilde{\mathbf{u}}) = \{\tilde{\mathbf{x}} : \tilde{\mathbf{x}} \text{ é SO de PLI}(\tilde{\mathbf{u}})\}$

Se: $\mathbf{0} \in Sub \Rightarrow ?$

OPTIMIZAÇÃO INTEIRA

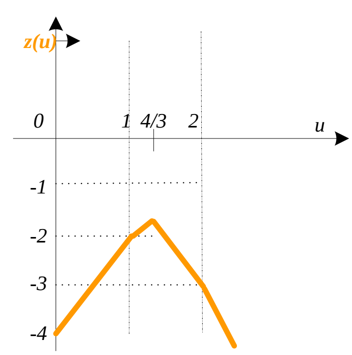
Exemplo

$\boxed{\tilde{\mathbf{u}} = 1}$

$$z(\tilde{u}) = \underset{\mathbf{x} \in X}{Min} \{ x_1 \underbrace{(1 - \tilde{u})}_{=0} + x_2 (\tilde{u} - 2) \}$$

$$S(\tilde{\mathbf{u}}) = \left\{ \tilde{\mathbf{x}}^1 = (0,2) \;;\; \tilde{\mathbf{x}}^2 = (1,2) \right\}$$

- Subgradientes: $\mathbf{b} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} = 0 - x_1 + x_2$



OPTIMIZAÇÃO INTEIRA — Método de Subgradiente

- Obtenção de "bons" mutiplicadores: $w_{LD} = max\{z(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \geq \mathbf{0}\}$

0. Input: max_iter; $\mathbf{u}^o$; $k=0$; ε ; μ_0 ; $\bar{z}$; $\underline{z}$

μ passo (escalar)

1. Resolver PLI($\mathbf{u}^k$) e seja $\mathbf{x}^k$ a respectiva s.o.

   Se $\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^k \leq \mathbf{0}$ e $\mathbf{u}^k(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^k) = \mathbf{0}$ FIM: $\mathbf{x}^k$ é s.o. do PLI e $z(\mathbf{u}^k)=w_{DL}=z^*$

2. Se $\underline{z} < z(\mathbf{u}^k) \Rightarrow \underline{z} \leftarrow z(\mathbf{u}^k)$

3. Obter o novo vector de multiplicadores: $\mathbf{u}^{k+1} = máx\{0 \; ; \; \mathbf{u}^k + \mu_k(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^k)\}$

   Subgradiente de $z(\mathbf{u})$ em $\mathbf{u}^k$

4. $k \leftarrow k+1$

5. Se ($k <$ max_iter ou $\dfrac{\bar{z} - \underline{z}}{\bar{z}} \leq \varepsilon$) FIM

   caso contrário voltar a 1.

Exemplo

OPTIMIZAÇÃO INTEIRA — Método de Subgradiente

Observações:

- O valor do minorante só é actualizado quando se obtém um valor melhor que o actual (passo 2)!
- Escolha do passo ($\mu_k>0$) – por forma a que haja convergência:

$$\mu_k = \lambda_k \frac{\bar{z} - z(\mathbf{u}^k)}{\left\|\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^k\right\|^2} \quad \text{com} \quad 0 < \lambda_k \leq 2$$

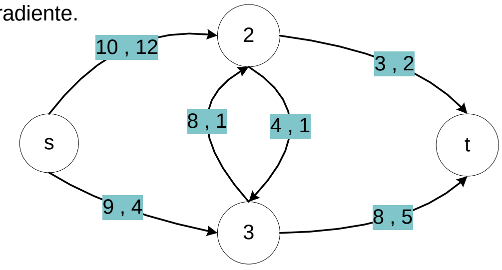
  - Regra: iniciar com $\lambda_k=2$ e dividir ao meio sempre num n.º pré-definido de iterações o valor do minorante não seja alterado!

- Sempre que no passo 1 se obtém uma SA de valor menor que o do majorante este deve ser actualizado!

Exemplo

Exercícios

3. Escrever o Método de subgradiente considerando o problema inicial de Maximização em que se relaxam restrições de tipo ≤.
4. Aplicar o algoritmo subgradiente (4 iterações) aos problemas do grupo 2.
5. Considere a seguinte rede, onde os valores sobre os arcos representam, respectivamente, o custo e o tempo. Formule o problema de determinação do caminho de custo total mínimo de s para t, com tempo total não superior a $\beta=10$ e defina uma sua relaxação Lagrangeana. Faça 2 iterações do método subgradiente.



Solver